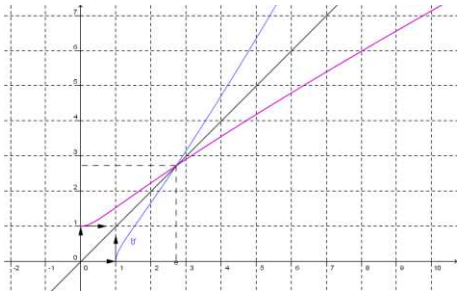
4) a)Soit $x \in [1,+\infty[$. si $M(x,y) \in (C) \cap \Delta$ équivaut à $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$



5) $\Rightarrow f(x) = x$ équivaut à $x\sqrt{\ln x} = x$ or $x \neq 0$ équivaut à $\ln x = 1$

donc x = e. ainsi $(C) \cap \Delta = \{A(e,e)\}$.

b) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{\ln x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\ln x} = +\infty$

alors (C) admet branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction $(O, \vec{j})$.

4) a) f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[) = [0,+\infty[$. f admet alors une fonction réciproque g définie sur $[0,+\infty[$.

b) $(C') = S_{\Delta}(C)$

5) a) Pour n = 0, $u_o = 0$. $0 \leq u_o \leq e$ (vérifie).Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $0 \leq u_n \leq e$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq e$. On a $0 \leq u_n \leq e$ et comme f est croissante sur $[1,+\infty[$ donc g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ d'où $g(0) \leq g(u_n) \leq g(e)$ équivaut à : $1 \leq u_{n+1} \leq e$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq e$.

b) $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$ or (C') est au dessus de Δ sur [0,e] donc $g(x) \geq x \ \forall x \in [0,e]$ et comme $u_n \in [0,e]$ alors $g(u_n) \geq u_n$ *c'est à dire* $u_{n+1} \geq u_n$ alors (u) est une suite croissante.

c) la suite (u) est une suite croissante et majorée par e donc elle est convergente. Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ or $0 \leq u_n \leq e$ donc $0 \leq l \leq e$. On a f est continue sur $[1,+\infty[$ donc g est continue sur $[0,+\infty[$ et en particulier en l d'où $g(l) = l$. Or e est la seule solution de l'équation f(x) = x donc $g(l) = l$ équivaut à $l = e$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$

Exercice N°5: A-1)a- f est définie et continue sur $]0,+\infty[$. $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}(1+\ln x)$ et $f'(x) = 0$ équivaut à x = e.

b- Pour tout n ≥3 on a : $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{e}$ et comme f est continue et strictement croissante sur [1,e] donc elle réalise une bijection de [1,e] sur f([1, $\frac{1}{e}$]) = [0,e]/ or $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{e}$ alors il existe une unique solution $a_n \in [1,e]$ de l'équation : $f(x) = \dfrac{1}{n}$.

x	0		e		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	−	
f(x)	‖	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0
	-∞				

c- On a $f(a_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$ *et* $f(a_n) = \dfrac{1}{n}$ *alors* $f(a_{n+1}) < f(a_n)$ et f est une fonction croissante sur $[1,e]$ alors $a_{n+1} < a_n$.

Donc a_n est une suite décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

2)a- On pose $h(x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)$, h est une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$ et $h'(x) = 1 - x - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{-x^2}{x+1}$

D'où h'(x) ≤ 0 sur $[0,+\infty[$. D'après le tableau de variation on a h(x)≤ 0 pour tout x ≥ 0.

x	0		$+\infty$
h'(x)	‖	−	
h(x)	0	↘	

b- Montrons que : $(1+x)\dfrac{1}{2}x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2 \leq x - \dfrac{1}{2}x^2$?

On a $(1+x)\dfrac{1}{2}x - \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}x^2\right) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{1}{2}x^2 = -\dfrac{1}{2}x + x^2 = x\left(-\dfrac{1}{2} + x\right) \leq 0$ car $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Qarray.tn - Agra Blech-Qarray.tn - Agra Blech-Qarray.tn

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...